

Акустические приборы и системы

УДК 534.3

А.В. Коржик, д-р техн. наук, Н.Ю. Филиппова

Постановка и решение задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, размещенным в замкнутом волновом слое

Аналитически решена задача о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, размещенным в замкнутом волновом слое с учетом многомодовости системы. Решение задачи производится с помощью метода частичных областей, а также свойств полноты и ортогональности цилиндрических волновых функций при сопряжении полей на границах частичных областей. Определены коэффициенты разложения акустических, механических и электрических полей оболочки и волнового кольцевого слоя.

The problem of receiving a cylindrical electroelastic audio converter with full electrode surface, placed in a closed-wave multi-mode fiber based system is solved. Solution of the problem is occur with the method of partial domains, using the Fourier method, and the properties of completeness and orthogonality of the cylindrical wave functions for the conjugation of the fields on the boundaries of sub-domains. The expansion coefficients of sound fields of the wave envelope and the annular layer is found.

Ключевые слова: оболочка, пьезокерамический преобразователь, «сквозная» задача, метод частичных областей, волновой слой.

Введение

На сегодняшний день в практической гидроакустике задачи о формировании пространственной избирательности приемных акустических антенных решеток в широком частотном диапазоне требуют доопределения в части выбора вида экранирования. В качестве экрана в традиционных гидроакустических антеннах использовались резины различной марки с определенными физикомеханическими свойствами, а также компаунды и пенопласты, наносимые на поверхность пьезокерамического преобразователя.

Изначально исходной представляется задача о приеме звуковых волн цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем, размещенным в замкнутом кольцевом волновом слое. Её аналити-

ческое решение достаточно сложно. На сегодняшний день существует достаточно широкий перечень работ, использующих в постановочной части представление преобразователя в виде идеализированного тела цилиндрической формы или устройства с фиксированными физическими свойствами [1–5]. К тому же в ряде работ (например, [1, 6]) решение указанной задачи представлено с использованием допущения о том, что механическое сопротивление пьезокерамической оболочки-преобразователя и сопротивление излучения определяются с использованием элементов методологии расчета преобразователей как систем с сосредоточенными параметрами. При этом вопросы работы приемных преобразователей в замкнутых и незамкнутых кольцевых слоях освещены лишь для традиционных моделей преобразователей, не учитывающих их электроупругие свойства. Это связано с недостаточной изученностью электроупругих постановок задач для экранированных приемоизлучающих систем. При этом представляют практический интерес особенности использования кольцевых слоев как элементов согласования электроупругих преобразователей с рабочей средой. Так, работа [2] содержит результаты лишь о распределениях давлений перед кольцевым слоем в освещенной зоне и зоне тени в зависимости от звукопрозрачности слоя и не описывает характеристики электрических и механических полей преобразователя.

Известно также, что модовый состав тонких оболочек возбуждаемых звуковой волной достаточно разнообразен, а формы колебаний – частотно связаны (например, [5, 7–8]). Таким образом, вышеизложенное определяет актуальность предлагаемой работы, посвященной решению задачи о приеме звука цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем расположенного в волновом слое с учетом многомодовости системы «преобразователь-волновой слой».

Целью работы является аналитическое решение задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью в замкнутом волновом слое с учетом многомодовости указанной системы.

Постановка задачи

Рассматривается задача о приеме звука бесконечным круговым цилиндрическим преобразователем через замкнутый кольцевой слой в сквозной постановке, принадлежащая к классу задач стационарной гидроэластостатики.

Предполагается, что в идеальной малосжимаемой жидкости с плотностью ρ и скоростью звука c размещена колебательная система, состоящая из одиночного пьезокерамического цилиндрического преобразователя бесконечной длины, который расположен в замкнутом волновом кольцевом слое. Преобразователь представляется круговой электроупругой, радиально поляризованной оболочкой произвольного радиуса R_{0s} с толщиной стенки $h_{0s} = R_{1s} - R_{0s}$ (рис.1).

Внутри преобразователя – вакуум. На поверхность преобразователя нанесены сплошные электроды с углом раскрытия $2\gamma_{0s} = 2\pi$. Толщины электродов считаем малыми, не влияющими на электромеханические характеристики преобразователя и не требующими привлечения дополнительных характеристик по механическому и электрическому полям. Прием звука происходит через замкнутый кольцевой слой радиуса R_{1s} . Предполагается, что материал слоя не сопротивляется сдвиговым деформациям, толщина его $h_{cl} \ll \lambda_{cl}$, а его акустические свойства характеризуются плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 .

На заданную колебательную систему из бесконечности под углом α в направлении единичного вектора \mathbf{n} падает плоская звуковая волна p_0 единичной амплитуды.

Математически работа указанной колебательной системы описывается с использованием:

- уравнений состояния пьезоэлектрической керамики, которые линейно связывают между собой компоненты механических напряжений, деформации, электрической напряженности и индукции;
- уравнение движения элемента механической колебательной системы преобразователя;
- соотношения Коши, которые связывают компоненты тензора деформации и вектора перемещения;
- уравнение вынужденной электростатики.

Совместное решение всех этих уравнений позволяет определить характеристики преобразователей с учетом связанности всех трех полей – электрического, механического и акустического для случая стационарных задач. Решение задачи производится с помощью метода частичных областей, с использованием метода Фурье, а также свойств пол-

ноты и ортогональности цилиндрических волновых функций и функций вида $e^{in\varphi}$. Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов разложений для акустических, механических и электрических полей рассмотренной колебательной системы «преобразователь – волновой слой» как системы с распределенными параметрами.

Решение задачи

Введем ряд координатных систем (рис.1):

- общую прямоугольную систему координат $OXYZ$, расположенную, так что ось OX лежит в плоскости преобразователя, а ось OZ параллельна продольной оси цилиндра;
- локальную и прямоугольную систему координат $O_s X_s Y_s Z_s$, которые одинаково ориентированные в пространстве, причем оси $O_s Z_s$ совпадают с продольными осями соответствующих цилиндрических оболочек.
- локальную $R\varphi Z$ круговую цилиндрическую систему, связанную с прямоугольной системой известными формулами.

Используем метод частичных областей [1, 9, 10]. Разобьем область существования поля на ряд областей I, II, III (рис.1) так, что область I ($R_{0s} \leq r_s \leq R_{1s}$) соответствует замкнутому волновому слою, область II ($R_{1s} \leq r_s < \infty$) – рабочей среде, область III ($r_s \leq R_{0s} - h_{0s}$) – внутреннему объему цилиндра. Вследствие условия внутренней вакуумизации давление в области III отсутствует, т.е. $p_3 = 0$.

В области II предполагается существование поля падающей волны p_0 и рассеянного поля p_s . Полное поле определяется как

$$p_{II} = p_0 + p_s = -i\omega\rho \left[\sum_n E_n H_n^{(1)}(kr_s) e^{in\varphi_s} + e^{ik(nr_{0s})} e^{ik(nr)} \right]. \quad (1)$$

При условии совпадения центров общей и локальной системы координат O и O_s (т.е. $r_{0s} = 0$), плоская падающая волна p_0 в выражении (1) имеет вид

$$p_0 = \sum_n i^n I_n(kr_s) e^{in\varphi_s} e^{-in\alpha},$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$; $i = \sqrt{-1}$; α – угол падения плоской звуковой волны; φ_s – окружная координата; $I_n(kr_s)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка;

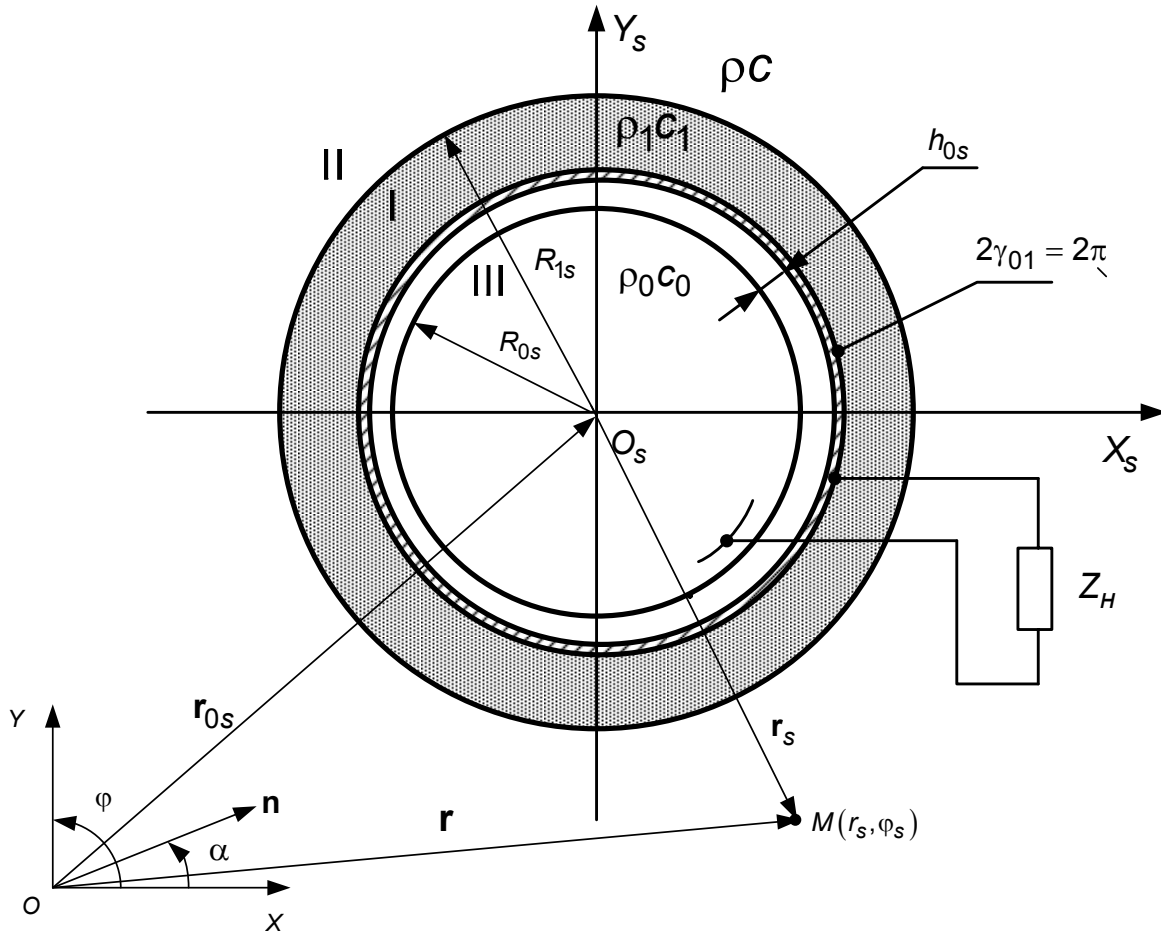


Рис. 1

Полное поле в области II в локальных координатах s -го цилиндра запишем как

$$p_{II} = -i\omega\rho \left[\sum_n E_n H_n^{(1)}(kr_s) e^{in\varphi_s} + \sum_n i^n I_n(kr_s) e^{in\varphi_s} e^{-in\alpha} \right]. \quad (2)$$

В области I в координатах s -го цилиндра радиальная нагрузка оболочки со стороны среды слоя представляется акустическим воздействием вида:

$$p_I = -i\omega\rho_1 \left[\sum_n (A_n I_n(k_1 r_s) + B_n N_n(k_1 r_s)) e^{in\varphi_s} \right]. \quad (3)$$

Рассмотрим граничные условия на поверхностях системы, а затем будем решать задачу по частям. Считаем, что на внешней поверхности

слоя $r_s = R_{1s}$, $\varphi_s \in [0; 2\pi]$ должны выполняться силовые и кинематические условия сопряжения областей, которые составляют следующую систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} p_I = p_{II}; \\ v_{r2} = v_{rcl}. \end{cases} \quad (4)$$

Запишем на поверхности оболочки (внутренняя поверхность слоя) $r_s = R_{0s}$, $\varphi_s \in [0; 2\pi]$ граничное условие

$$\frac{1}{i\rho_1 c_1} \frac{\partial p_I}{\partial (k_1 r_s)} = v_{r_s}. \quad (5)$$

Считаем, что нормальные составляющие колебательной скорости точек поверхности оболочки и волнового слоя определяются выражениями:

$$\begin{aligned} v_{r1} &= \frac{\partial W_s}{\partial t} = \dot{W}_s \quad \text{при } r_s = R_{0s}; \\ v_{r2} &= \frac{\partial W_{scn}}{\partial t} = \dot{W}_{scn} \quad \text{при } r_s = R_{1s}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим цилиндрический преобразователь. Он выполнен из пьезоматериала со скоростью звука c_{ms} и плотностью ρ_{ms} . Рассматривая плоскую задачу, считаем, что уравнения движения оболочки, записанные в рамках гипо-

тез Кирхгофа-Лява, представлены системой [11]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 + \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \right] \frac{\partial^2 U_s}{\partial \varphi_s^2} + \frac{\partial W_s}{\partial \varphi_s} - \\ & - \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 W_s}{\partial \varphi_s^3} - \\ & - R_{0s} \frac{e_{31}}{C_{11}^E} \frac{\partial E_{rs}^{(0)}}{\partial \varphi_s} - \frac{R_{0s}^2 \rho_{ms}}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{\partial U_s}{\partial \varphi_s} + \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 U_s}{\partial \varphi_s^3} - W_s - \\ & - \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^4 W_s}{\partial \varphi_s^4} + \\ & + R_{0s} \frac{e_{31}}{C_{11}^E} E_{rs}^{(0)} + \frac{R_{0s}^2}{h_{0s} C_{11}^E} q_{rs} - \\ & - \frac{R_{0s}^2 \rho_{ms}}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 W_s}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где q_{rs} - внешняя акустическая нагрузка;

W_s - радиальная составляющая перемещений точек поверхности оболочки

$$W_s = \sum_m W_m^{(s)} e^{im\varphi_s}, \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots;$$

U_s - тангенциальная составляющая перемещений точек поверхности оболочки

$$U_s = \sum_m W_m^{(s)} e^{im\varphi_s};$$

e_{31} - пьезокерамическая константа; ϵ_{33}^S - диэлектрическая проницаемость материала оболочки;

$E_{rs}^{(0)}$ - радиальная составляющая вектора напряженности электрического поля (поляризация оболочки – радиальная).

Рассмотрим электродирование преобразователя. Составляющая электрического поля в пьезокерамике $E_{rs}^{(0)}$ определяется из условия [8, 12]

$$U_m^{(0)} = - \int_{\frac{h_{0s}}{2}}^{\frac{h_{0s}}{2}} E_{rs|2\gamma_{01}} dh, \quad (8)$$

$$\text{где } E_{rs}^{(0)} = E_{rs|2\gamma_{01}} \cdot f_1(\varphi_s); \quad (9)$$

$$f_1(\varphi_s) = \sum_k 2\gamma_{01} \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s}.$$

Для случая полного электродирования с учетом свойств полноты и ортогональности уравнение (8) будет иметь вид

$$E_{rs}^{(0)} = E_{rs}|_{2\gamma_{01}} = - \frac{U_{01H}^{(0)}}{h_{01}} \cdot 2\pi. \quad (10)$$

Заметим, что справедлива ситуация $\frac{\partial E_{rs}^{(0)}}{\partial \varphi_s} = 0$ так как изменения $E_{rs}^{(0)}$ по углу для такого вида электродирования отсутствует.

В выражении (10) определим $U_{01H}^{(0)}$ как падение напряжения в цепи нагрузки электрода, которое можно определить исходя из условия [12] и учтем отсутствие тангенциальной составляющей перемещений точек поверхности оболочки:

$$I_H = - \frac{U_{01H}}{Z_H} = \int_S \frac{\partial D_r}{\partial t} dS = \int_0^{2\pi} (i\omega) D_r d\varphi_s,$$

$$\text{где } D_r = \epsilon_{33} E_r^{(0)} + e_{31} \left\{ W_s \frac{1}{R_{0s}} + \frac{1}{R_{0s}} \frac{\partial U_s}{\partial \varphi_s} \right\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{U_{01H}}{Z_H} &= (i\omega) \epsilon_{33} \frac{U_{01H}}{h_{0s}} \int_0^{2\pi} d\varphi_s + \\ &+ (i\omega) \frac{e_{31}}{R_{0s}} \sum_m W_m \int_0^{2\pi} e^{im\varphi_s} d\varphi_s, \\ E_{rs} &= - \frac{i\omega Z_H A \frac{e_{31}}{R_{0s}} 2\pi}{i\omega \epsilon_{33} A Z_H 2\pi - h_{0s}} W_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (7) и введем коэффициенты:

$$\begin{aligned} a &= \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2}, \\ b &= \left(1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right), \\ c &= \frac{R_{0s} e_{31}}{C_{11}^E h_{0s}}, \\ d &= \frac{R_{0s}^2 \rho_{ms}}{C_{11}^E}, \\ j &= \frac{R_{0s}^2}{C_{11}^E h_{0s}}; \end{aligned} \quad (11)$$

Сведем коэффициенты (11) левых частей уравнений в системе (7) и используя функцию включения получим

$$\begin{cases}
\sum_m \left[d\omega^2 - (1+ab)m^2 \right] U_m^{(s)} e^{im\varphi_s} + \\
+ \sum_m \left[(1+abm^2)im \right] W_m e^{im\varphi_s} + \\
+ cU_{01} \left[\sum_k 2\gamma_{01}(ik) \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s} \right] = 0; \\
\sum_m \left[-im(1+abm^2) \right] U_m^{(s)} e^{im\varphi_s} + \\
+ \sum_m \left[d\omega^2 - (1+abm^4) \right] W_m e^{im\varphi_s} - \\
- cU_{01} \left[\sum_k 2\gamma_{01} \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s} \right] = -jq_{rs}.
\end{cases} \quad (12)$$

Пусть

$$F_m(\omega) = d\omega^2 - (1+ab)m^2;$$

$$\bar{F}_m(\omega) = d\omega^2 - (1+abm^4);$$

$$M_m = m(1+abm^2).$$

Тогда система (12) будет иметь вид

$$\begin{cases}
\sum_m F_m(\omega) U_m^{(s)} e^{im\varphi_s} + i \sum_m M_m W_m e^{im\varphi_s} + cU_{01} \times \\
\times \left[\sum_k 2\gamma_{01}(ik) \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s} \right] = 0 \\
-i \sum_m M_m U_m^{(s)} e^{im\varphi_s} + \sum_m \bar{F}_m(\omega) W_m e^{im\varphi_s} - cU_{01} \times \\
\times \left[\sum_k 2\gamma_{01} \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s} \right] = -j \times \\
\times \left[-i\omega\rho_1 \left(\sum_n A_n I_n(k_1 R_{0s}) e^{in\varphi_s} + \right. \right. \\
\left. \left. + \sum_n B_n N_n(k_1 R_{0s}) e^{in\varphi_s} \right) \right].
\end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (13). Используем свойство полноты и ортогональности функций $e^{im\varphi_s}$ и $e^{ik\varphi_s}$ на интервале $\varphi_s \in [-\pi; \pi]$. Умножим правую и левую часть первого уравнения на $e^{-il\varphi_s}$ ($l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) и проинтегрируем по φ_s в пределах $[-\pi; \pi]$. При этом

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\varphi_s} e^{-il\varphi_s} d\varphi_s &= \frac{e^{i(m-l)\varphi_s}}{m-l} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{\sin(m-l)\pi}{(m-l)\pi} \pi = \begin{cases} \pi & \text{при } l = m; \\ 0 & \text{при } l \neq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Тогда

$$F_m(\omega) U_m^{(s)} + iM_m W_m + cU_{01} \left[\sum_k 2\gamma_{01}(im\pi) \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} \right] = 0.$$

Рассмотрим второе уравнение системы (13). Используя свойство полноты и ортогональности функций $e^{im\varphi_s}$ и $e^{ik\varphi_s}$ на интервале $\varphi_s \in [-\pi; \pi]$, а также после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}
-iM_m U_m^{(s)} + \bar{F}_m(\omega) W_m - cU_{01} 2\gamma_{01} \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} = \\
= -j \left[-i\omega\rho_1 \left(\sum_n A_n I_n(k_1 R_{0s}) + \right. \right. \\
\left. \left. + \sum_n B_n N_n(k_1 R_{0s}) \right) \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Далее, используем граничные условия и функциональные уравнения (4) – (6), после чего производим ортогонализацию функций. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases}
W_m^{(s)} = -i \frac{k_1}{\omega} \left(A_m^s I_m'(k_1 R_{0s}) + B_m^s N_m'(k_1 R_{0s}) \right); \\
k_1 \left[A_m^s I_m'(k_1 R_{1s}) + B_m^s N_m'(k_1 R_{1s}) \right] = \\
= k \left[E_m^s H_m^{(1)}(k R_{1s}) + \right. \\
\left. + i^m I_m'(k R_{1s}) e^{-im\alpha} \right]; \\
\rho_1 \left[A_m^s I_m(k_1 R_{1s}) + B_m^s N_m(k_1 R_{1s}) \right] = \\
= \rho \left[E_m^s H_m^{(1)}(k R_{1s}) + \right. \\
\left. + i^m I_m(k R_{1s}) e^{-im\alpha} \right].
\end{cases}$$

В систему уравнений штрих указывает на дифференцирование по аргументу функций. Очевидно, что в уравнении (14) третий член всегда равен нулю, кроме $k = 0$. Это говорит о справедливости утверждения о равенстве нулю $\frac{\partial E_{rs}^{(0)}}{\partial \varphi_s} = 0$. Далее из уравнения (14) с учетом вышесказанного получим

$$U_m^{(s)} = -iW_m \frac{M_m}{F_m(\omega)}.$$

Таким образом, имеем пять неизвестных коэффициентов разложений полей A_m^s , B_m^s , E_m^s , W_m , $U_m^{(s)}$, которые определим из нижеприведенной системы уравнений (15)

$$\begin{cases}
k_1 \left[A_m^s I_m'(k_1 R_{1s}) + B_m^s N_m'(k_1 R_{1s}) \right] = \\
= k \left[E_m^s H_m^{(1)}(k R_{1s}) + \right. \\
\left. + i^m I_m'(k R_{1s}) e^{-im\alpha} \right]; \\
\rho_1 \left[A_m^s I_m(k_1 R_{1s}) + B_m^s N_m(k_1 R_{1s}) \right] = \\
= \rho \left[E_m^s H_m^{(1)}(k R_{1s}) + \right. \\
\left. + i^m I_m(k R_{1s}) e^{-im\alpha} \right]; \\
-i M_m U_m^{(s)} + \bar{F}_m(\omega) W_m - c U_{01} 2 \gamma_{01} \frac{\sin k \gamma_{01}}{k \gamma_{01}} = \\
= -j \left[-i \omega \rho_1 \left(\sum_m A_m I_m(k_1 R_{0s}) + \right. \right. \\
\left. \left. + \sum_m B_m N_m(k_1 R_{0s}) \right) \right]; \\
W_m^{(s)} = -i \frac{k_1}{\omega} \left(A_m^s I_m'(k_1 R_{0s}) + B_m^s N_m'(k_1 R_{0s}) \right); \\
U_m^{(s)} = -i W_m \frac{M_m}{F_m(\omega)}.
\end{cases} \quad (15)$$

Решение системы уравнений (15) будем осуществлять в два этапа. На первом этапе задаем $m = 0$ и находим A_0^s , B_0^s , E_0^s , W_0 , $U_0^{(s)}$. По известному W_0 для $m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots$ определяем A_m^s , B_m^s , E_m^s , W_m , $U_m^{(s)}$.

Введем ряд обозначений

$$Z_1 = \rho_1 c_1; \quad Z_{cp} = \rho c; \quad Z = \rho c_1; \quad (16)$$

$$a_0(\omega) = \frac{i \omega Z_H A \frac{e_{31}}{R_{0s}} 2\pi}{i \omega \varepsilon_{33} Z_H A 2\pi - h_{0s}}; \quad (17)$$

$$\tilde{a}_0(\omega) = -\frac{\bar{F}_0(\omega) - 2\pi c a_0(\omega)}{2\pi j \omega \rho_1 c_1};$$

$$\Delta_{R_{0s}}^0(\omega) = \frac{\tilde{a}_0(\omega) N_0'(k_1 R_{0s}) - N_0(k_1 R_{0s})}{\tilde{a}_0(\omega) I_0'(k_1 R_{0s}) - I_0(k_1 R_{0s})} \quad (18)$$

$$\beta_{R_{1s}}^0(\omega) = Z_{cp} I_0'(k_1 R_{1s}) H_0(k R_{1s}) - \\ - Z_1 I_0(k_1 R_{1s}) H_0'(k R_{1s}); \quad (19)$$

$$\xi_{R_{1s}}^0(\omega) = Z_{cp} N_0'(k_1 R_{1s}) H_0(k R_{1s}) - \\ - Z_1 N_0(k_1 R_{1s}) H_0'(k R_{1s}); \quad (20)$$

$$\eta_{R_{1s}}^0(\omega) = Z_{cp} I_0'(k R_{1s}) H_0(k R_{1s}) - \\ - Z_1 I_0(k R_{1s}) H_0'(k R_{1s}). \quad (21)$$

Решая систему уравнений (15) выразим коэффициенты разложений ряда акустических механических и электрических полей при $m = 0$ с помощью обозначений (16) – (21)

$$\begin{cases}
B_0 = \frac{\eta_{R_{1s}}^0(\omega)}{\xi_{R_{1s}}^0(\omega) - \beta_{R_{1s}}^0(\omega) \Delta_{R_{0s}}^0(\omega)}; \\
A_0 = -B_0 \Delta_{R_{0s}}^0(\omega); \\
E_0 = \frac{k_1}{k} \left[A_0 I_0'(k_1 R_{1s}) + B_0 N_0'(k_1 R_{1s}) \right] - I_0(k R_{1s}) \\
H_0'(k R_{1s}); \\
W_0 = -i \frac{k_1}{\omega} \left(A_0 I_0'(k_1 R_{0s}) + B_0 N_0'(k_1 R_{0s}) \right); \\
U_0 = -W_0 a_0(\omega).
\end{cases}$$

Перейдем ко второму этапу решения задачи. По известному W_0 для $m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots$ определяем A_m^s , B_m^s , E_m^s , W_m , $U_m^{(s)}$. Аналогичным образом, вводя ряд обозначений

$$\tilde{a}_0^m(\omega) = -\frac{\bar{F}_m(\omega) - \frac{(M_m)^2}{F_m(\omega)}}{j 2\pi \omega \rho_1 c_1}; \quad (20)$$

$$\Delta_{R_{0s}}^m(\omega) = \frac{\tilde{a}_0^m(\omega) N_m'(k_1 R_{0s}) - N_m(k_1 R_{0s})}{\tilde{a}_0^m(\omega) I_m'(k_1 R_{0s}) - I_m(k_1 R_{0s})};$$

$$\tilde{a}_{10}^m(\omega) = c \frac{E_{rs}}{i \omega \rho_1 j}; \quad (21)$$

$$\Delta_{R_{0s}}^{1m}(\omega) = \frac{\tilde{a}_{10}^m(\omega)}{\tilde{a}_0^m(\omega) I_m'(k_1 R_{0s}) - I_m(k_1 R_{0s})};$$

$$\beta_{R_{1s}}^m(\omega) = Z_{cp} I_m'(k_1 R_{1s}) H_m(k R_{1s}) - \\ - Z_1 I_m(k_1 R_{1s}) H_m'(k R_{1s}); \quad (22)$$

$$\xi_{R_{1s}}^m(\omega) = Z_{cp} N_m'(k_1 R_{1s}) H_0(k R_{1s}) - \\ - Z_1 N_m(k_1 R_{1s}) H_0'(k R_{1s}); \quad (23)$$

$$\eta_{R_{1s}}^m(\omega) = I_m'(k R_{1s}) H_m(k R_{1s}) - \\ - I_m(k R_{1s}) H_m'(k R_{1s}); \quad (24)$$

$$\varsigma_{R_{1s}}^m(\omega) = Z i^m e^{-im\alpha} \eta_{R_{1s}}^m(\omega). \quad (25)$$

В результате решения системы уравнений (15), вводя обозначения (20) – (25) получим

$$\left\{ \begin{aligned} B_m &= \frac{\zeta_{R_{1s}}^m(\omega) - \Delta 1_{R_{0s}}^m(\omega) \beta_{R_{1s}}^m(\omega)}{\xi_{R_{1s}}^m(\omega) - \beta_{R_{1s}}^m(\omega) \Delta_{R_{0s}}^m(\omega)}; \\ A_m &= -B_m \Delta_{R_{0s}}^m(\omega); \\ E_m &= \frac{k_1}{k} \left[\frac{A_m I'_m(k_1 R_{1s}) + B_m N'_m(k_1 R_{1s})}{H'_m(k R_{1s})} - \frac{i^m e^{-im\alpha} I'_m(k R_{1s})}{H'_m(k R_{1s})} \right]; \\ U_m^{(s)} &= -i W_m \frac{M_m}{F_m(\omega)}; \\ W_m &= -i \frac{k_1}{\omega} (A_m I'_m(k_1 R_{0s}) + B_m N'_m(k_1 R_{0s})). \end{aligned} \right.$$

Таким образом, определены неизвестные коэффициенты разложений, которые дают возможность определить акустические, механические и электрические поля. Для описания указанных полей необходимо подставить полученные коэффициенты в ряды разложений (2) – (3).

Выводы

Аналитически решена задача о приеме звуковых волн цилиндрическим пьезокерамическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, который расположен в замкнутом кольцевом волновом слое.

При постановке задачи используется «сквозной» метод и привлекается линейная теория электроупругих оболочек, основывающаяся на гипотезах Кирхгофа-Лява. Акустические поля рассмотрены в рамках линейных приближений классической акустики. Решение проведено с использованием разложений по собственным формам (свойство многомодовости системы «преобразователь-волновой слой»), а также свойств полноты и ортогональности цилиндрических волновых функций и функций вида $e^{in\varphi}$.

Аналитически для данного вида электродирования подтверждена зависимость выходного электрического напряжения лишь от нулевой моды составляющей перемещений точек поверхности преобразователя.

Получены выражения для неизвестных коэффициентов разложений полей позволяющих рассчитать давления в слое и среде, напряже-

ние на нагрузке, составляющие перемещений точек поверхности оболочек.

Литература

1. Гринченко В.Т., И. В. Вовк Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наук.думка, 1986. – 240 с.
2. Вовк И.В., Гринченко В.Т., Кононченко Л.А. Дифракция звуковых волн на плоской решетке состоящей из полых упругих брусьев // Акуст. журн. – 1976. – №22, вып. 2. – С. 201 – 205.
3. Смаришев М.Д. Направленность гидроакустических антенн. – Л.: Судостроение, 1973. – 277 с.
4. Junger M.C. Feit D. Sound, structures and their interaction. – Cambridge: MIT, 1972. – 208 p.
5. Junger M.C. Sound scattering by thin elastic shells // Ibid. – 1952. – 24. – №4. – P. 562 – 567.
6. Плещач М.Г., Лейко О.Г. Випромінення звуку циліндричним п'єзокерамічним перетворювачем, розміщеним в шарі звукопрозорого матеріалу // Електроника и связь. – 2010, – №4, – С. 175 – 179.
7. Аронов Б.С. Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 272 с.
8. Коржик А.В. Об особенностях электромеханических преобразований в приемных пьезокерамических преобразователях с разрезными электродами // Електроника и связь. – 2010, – №2, – С. 224 – 230.
9. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Маципура В.Т. Основы акустики. – К.: Наукова думка, 2007. – 640 с.
10. Лейко А.Г., Шамарин Ю.Е., Ткаченко В.П. Подводные акустические антенны. Методы расчета звуковых полей. – Киев, 2000. – 320 с.
11. Борисенко В.А., Мартиненко В.С., Улитко А.Ф., К теории колебаний пьезокерамических оболочек. – В кн.: Мат. Физ. – К.: Наукова думка, 1977, С. 71 – 76.
12. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Отв. ред. А.Н. Гузь АН УССР. – К.: Наукова думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость. – 280 с.